第十章习题

10.1 设 f 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数

1) 证明：若 f 在 $x=0$ 处可微，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{2x}=f'(0)$

2) 上述逆命题是对的吗？

10.2 设 f 是定义在 $\mathbb{R}$ 上，在 $x=0$ 处连续的函数，使得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)-f(x)}{x}$ 存在且有限，证明 f 在 $x=0$ 处可微。

10.3 设 $a\in I$，$f: I\to\mathbb{R}$ 在 $x=a$ 处可微。

令 $\varphi: x\longmapsto f(a)+f'(a)(x-a)$，$g: x\longmapsto \mu+\lambda(x-a)$，其中 $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$。

证明：若 $(\lambda,\mu)\neq(f'(a),f(a))$，则存在 $\eta>0$ 使得：对于任意

$$x\in I \text{ 满足 } 0<|x-a|\leq\eta,\ \text{有 } |f(x)-g(x)|>|f(x)-\varphi(x)|$$

当 $\lambda\neq f'(a)$ 时，分类 $\mu\neq f(a)$ 和 $\mu=f(a)$。

10.4 设 f, g 为 $[a,b]$ 上连续在 $]a,b[$ 上可微的函数。

证明：存在 $c\in\,]a,b[$，使得

$$(f(b)-f(a))g'(c)=(g(b)-g(a))f'(c).$$

10.5 设 f 是 $[a,b]$ 上的可微函数，使得 $f(a)=f(b)=f'(a)=0$

证明存在 $c\in\,]a,b[$，使得

$$f'(c)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}.$$

10.6 设函数 $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ 连续，且在 $\mathbb{R}_+^*$ 上可微，满足：

$$f(0)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=0.$$

证明：存在 $c\in\,]0,+\infty[$，使得 $f'(c)=0$

10.7 证明不等式

$$\forall x\in\left[0,\tfrac{\pi}{2}\right]\quad \tfrac{2}{\pi}x \leqslant \sin x \leqslant x.$$

10.8 设 f 是 I 上可微函数.

1) 设 a,b 为 I 的两点使得 $f'(a)<0$, $f'(b)>0$.
证明在 a,b 之间存在 c 使得 $f'(c)=0$.

2) 证明 $f'(I)$ 是一个区间 (Darboux 定理)

10.9 设 f,g 是 I 上连续函数, 在 I 的内部可微. 设 $|f'|\leqslant g'$

证明 $|f(b)-f(a)| \leqslant g(b)-g(a)$

10.10 设 a 为 I 的一个内点. 设 $f: I\to\mathbb{R}$ 可微, 且在 a 处二次可微. 称 f 在 a 处局部严格极小值, 如果存在 $\eta>0$ 使得对于所有满足 $0<|x-a|\leqslant\eta$ 的 $x\in I$, 有 $f(x)>f(a)$.

证明: 若 $f'(a)=0$ 且 $(f')'(a)>0$, 则 a 是局部严格极小值点.

10.11 设 f 是在 $[0,1[$ 上如下定义 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

证明: 对于任意的整数 n, 和任意 $x\in[0,1[$, 有 $f^{(n)}(x)\geqslant 0$.

10.12 设 f 在 $\mathbb{R}$ 上如下定义 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$

1) 证明: 对任意的整数 n, 存在唯一的多项式 P_n 使得

对于任意实数 x, 有 $f^{(n)}(x)=\frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$

2) 给出 P_n 的根.

提示: 可用表达式 $f(x)=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i}-\frac{1}{x+i}\right)$

10.13 设 f 是 I 上的 C^n 函数，且在 $x_1<\cdots<x_n$ 上消失，其中 $n\geq 1$

证明：对于所有 $x\in I$，存在 $\xi\in I$ 使得：

$$f(x)=\frac{(x-x_1)\cdots(x-x_n)}{n!}f^{(n)}(\xi).$$

10.14 设 f 是在 $\mathbb{R}$ 上由 $f(x)=x^2-1$ 定义的映射。

对任意自然数 n，令 P_n 为 $\mathbb{R}$ 上的如下定义的多项式函数

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}D^n(f^n)$$

1) 证明 P_n 与 n 有相同的奇偶性

2) 计算 $P_n(1)$，导出 $P_n(-1)$

3). 证明 P_n 在 $(-1,1)$ 上消失 n 次.

10.15 设 q 是 $\mathbb{R}$ 上的 C^1 函数，满足：

$$\exists A\in\mathbb{R}_+,\ \forall x\geq A\ \left(q(x)>0 \text{ 和 } q'(x)>0\right).$$

证明：满足

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad y''(x)+q(x)y(x)=0$$

的二次可微函数 y 在 $+\infty$ 附近是有界的.

提示：可考虑函数 $z: x\in[A,+\infty[\ \longmapsto y^2(x)+\dfrac{y'^2(x)}{q(x)}$

10.16 寻找内接于以圆点为圆心，1为半径的具有最大面积的三角形ABC，设 A和B在平行于轴(Ox)的直线上.

1) 当A,B在由方程 $Y=y,\ y\in[-1,1]$ 定义的直线上，确定ABC的最大面积，用 $f(y)$ 记此面积。

2). 给出结论

10.17 设 $f: I \to I$ 是可微函数，$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为如下定义的序列：

$u_0 \in I$，$u_{n+1} = f(u_n)$，又设 ~~点~~ c 是 f 的一个不动点，且 $|f'(c)| > 1$

求如 (u_n) 收敛于 c。

1) 设对于所有自然数 n，有 $u_n \neq 0$，~~计算~~ 给出 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}-1}{u_n-1}$

并导出矛盾。

2) 证明：序列 (u_n) 收敛于 c 当且仅当 c 是稳态的。
稳定的

3) 证明序列 $u_0 = \frac{1}{3}$，$u_{n+1} = 4u_n(1-u_n)$ 发散。

10.18 研究如下定义的序列 $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$：

$$u_0 \in [0,2],\quad u_{n+1} = \sqrt{2-u_n}.$$

10.19 设序列 $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 如下定义：$u_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$，$u_{n+1} = \sin(2u_n)$。

1) ~~画~~证明区间 $[\frac{\pi}{4}, 1]$ 在 $f: x \mapsto \sin 2x$ 的作用下是稳定的。

2) 研究序列 (u_n)。

10.20 → 有限增量不等式

设函数 $f: [a,b] \to \mathbb{C}$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 $]a,b[$ 上可微。

又设 ~~对~~ 存在实数 M 使得，对于 $x \in]a,b[$，有 $|f'(x)| \le M$。

1) ~~设~~在这一小问中，设 $f(a)$ 和 $f(b)$ 都是实的，证明：

$$|f(b) - f(a)| \le M(b-a).$$

2) 不再假定 $f(a)$ 和 $f(b)$ 是实的，通过考察定义在

$[a,b]$ 上的函数 $g(x) = u\big(f(x) - f(a)\big)$，其中 $u \in \mathbb{C}$ 是个

适当选取的常数，证明 $|f(b) - f(a)| \le M(b-a)$。